Marek Klimko, Pavel Žitek, Kamil Sedlák

Sbírka příkladů z mechaniky tekutin I.

FAKULTA STROJNÍ
ZÁPADOČESKÉ
UNIVERZITY
V PLZNI

Marek Klimko, Pavel Žitek, Kamil Sedlák

Sbírka příkladů z mechaniky tekutin I.

https://doi.org/10.24132/ZCU.2017.07460

Sbírka příkladů z mechaniky tekutin I. (elektronické vydání)

Ing. Marek Klimko
Ing. Pavel Žitek
Ing. Kamil Sedlák, Ph.D.

Grafický návrh obálky:
Tereza Saitzová

Vydala:
Západočeská univerzita v Plzni
P.O.Box 314, Univerzitní 8, 306 14 Plzeň

1. vydání, 168 stran
Pořadové číslo: 2277, ediční číslo: 55-068-17
Plzeň 2017

ISBN 978-80-261-0746-0
ISBN 978-80-261-0745-3 (tištěné vydání)

© Ing. Marek Klimko; Ing. Pavel Žitek; Ing. Kamil Sedlák, Ph.D.
Západočeská univerzita v Plzni

https://doi.org/10.24132/ZCU.2017.07460

Předmluva

Tato sbírka příkladů je určena studentům vysokých škol s technickým zaměřením a má sloužit jako podpůrný materiál pro cvičení z předmětu Mechanika tekutin I. Na úvod byl zařazen velmi stručný teoretický přehled základních pojmů a výchozích matematických vztahů, po kterých následují řešené příklady podle jednotlivých kapitol. Věříme, že tato publikace bude přínosná a najde své uplatnění mezi studenty.

Obsah

ÚVOD 5

1. MATEMATICKÝ A FYZIKÁLNÍ APARÁT 7

1.1 Parciální a totální derivace 7

1.2 Gradient, divergence, rotace 7

1.3 Integrální věty 8

1.4 Základní vlastnosti tekutin 9

1.5 Základní rovnice využívané v MT I 11

2. ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI 16

3. TLAK V TEKUTINĚ 29

4. MANOMETRY 38

5. RELATIVNÍ ROVNOVÁHA 46

6. SÍLY NA STĚNY 70

7. STABILITA 84

8. DOKONALÉ TEKUTINY 92

9. ZTRÁTY 104

10. VÝTOKY 121

11. VĚTA O ZMĚNĚ TOKU HYBNOSTI 135

12. PROFILY 149

Seznam hlavních symbolů

Symbol	Název	Jednotky
a	zrychlení	[$m \cdot s^{-2}$]
c	absolutní rychlost	[$m \cdot s^{-1}$]
D	průměr	[m]
F	síla	[N]
f	součinitel tření	[-]
g	tíhové zrychlení	[$m \cdot s^{-2}$]
J	kvadratický moment plochy	[m^4]
m	hmotnost	[kg]
$\dot{m}$	hmotnostní průtok	[$kg \cdot s^{-1}$]
M_K	krouticí moment	[$N \cdot m$]
n	otáčky	[s^{-1}]
P	výkon	[W]
p	tlak	[Pa]
Q	teplo	[J]
R	poloměr	[m]
Re	Reynoldsovo číslo	[-]
S	plocha	[m^2]
u	obvodová rychlost	[$m \cdot s^{-1}$]
$\dot{V}$	objemový průtok	[$m^3 \cdot s^{-1}$]
w	relativní rychlost	[$m \cdot s^{-1}$]
α	izobarický součinitel objemové roztažnosti	[-]
β	izochorický součinitel tlakové rozpínavosti	[-]
ε	izotermický součinitel objemové stlačitelnosti	[-]
ζ	ztrátový koeficient	[-]
η	dynamická viskozita	[$Pa \cdot s$]
κ	adiabatický exponent	[-]
ν	kinematická viskozita	[$m^2 \cdot s^{-1}$]
ρ	hustota	[$kg \cdot m^{-3}$]
ω	úhlová rychlost	[$rad \cdot s^{-1}$]

Úvod

Mechanika tekutin (dále jen MT) je část mechaniky, zabývající se rovnováhou sil za klidu a pohybu kapalin, resp. plynů.

MT můžeme rozdělit:

- podle druhu tekutiny:
  a) Mechaniku kapalin (hydromechaniku)
  b) Mechaniku plynů (aeromechaniku)
- podle stavu tekutiny:
  a) Statiku (všechny částice tekutiny mají nulovou rychlost, každá částice je v rovnováze)
  b) Dynamiku (částice tekutiny se pohybují)

Při řešení úloh v rámci MT se častokrát setkáme s pojmem **,,elementární objem``**, který v podstatě plní obdobnou funkci jako ,,hmotní bod`` v klasické mechanice tuhých těles. Pro elementární objem se odvozují podmínky rovnováhy sil za klidu a pohybu tekutin a definují základní zákony (např. zákon zachování hmoty, resp. energie). Pro jejich odvození se předpokládá, že tekutina je spojité a izotropní (stejnorodé) prostředí. Výsledkem jsou diferenciální rovnice, které se integrují na základě znalostí okrajových, případně počátečních podmínek. Právě předpoklad izotropního a spojitého prostředí umožňuje výhodně řešit úlohy MT na zvoleném, velmi malém (elementárním) objemu a odvozené zákonitosti pak aplikovat na celý objem. [5]

1. Matematický a fyzikální aparát

Studium mechaniky tekutin se neobejde bez základních matematických znalostí, jakými jsou např. integrální věty, vlastnosti funkcí s více proměnnými a pod. Proudění je vždy prostorové, obecně nestacionární a je popisované parciálními diferenciálními rovnicemi. Z tohoto důvodu budou v této části uvedené základní matematické operace používané v teorii mechaniky tekutin, samozřejmě bez hlubšího výkladu.

1.1 Parciální a totální derivace

Jednou z velmi často používaných veličin je rychlost w. Rychlost je funkcí prostorových souřadnic x, y, z a času t. Parciální derivaci (např. $\partial w/\partial x$) dostaneme tak, že w derivujeme podle souřadnice x, přičemž y, z a t považujeme za konstanty. Obdobně se dokážeme dopracovat k parciálním derivacím rychlosti podle zbylých proměnných. [2]

$$w = f(x, y, z, t)$$

$$w = x^3 + 2xyt - z^2$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 3x^2 + 2yt, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 2xt, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = -2z, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 2xy$$

Totální (resp. úplný) **diferenciál** získáme součtem všech parciálních derivací. Podělením levé a pravé strany časem dt dostaneme **totální derivaci** (v tomto případě zrychlení).

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz + \frac{\partial w}{\partial t}dt \quad |: dt$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot w_x + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot w_y + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot w_z + \frac{\partial w}{\partial t}$$

Tenzorový zápis zrychlení:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial k} \cdot w_k + \frac{\partial w}{\partial t} \quad \text{, kde } \mathbf{k} \text{ je sčítací index}$$

1.2 Gradient, divergence, rotace

Gradient obecného skaláru φ můžeme zapsat buď jako součet jednotlivých parciálních derivací nebo pomocí operátoru nabla ∇ (Hamiltonov operátor). [2]

$$grad\ \varphi = \vec{\imath} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{\jmath} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \left(\vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \varphi = \vec{\nabla}\varphi$$

Skalární součin dvou operátorů $\vec{\nabla}$ je Laplaceov operátor Δ (výsledkem je samozřejmě skalár).

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \left(\vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial k^2}$$

V další části si ukážeme zápis **divergence** součinu skaláru a vektoru. **Rotor** obecného vektoru $\vec{a}$ je opět vektor, který udává dvounásobek úhlové rychlosti otáčení vektorového pole. [2]

$$div(\varphi\vec{a}) = \frac{\partial(\varphi \cdot a_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\varphi \cdot a_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\varphi \cdot a_z)}{\partial z} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}a_x + \frac{\partial\varphi}{\partial x}a_y + \frac{\partial\varphi}{\partial x}a_z +$$

$$+\varphi \cdot \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) = \vec{\nabla}\varphi\vec{a} + \varphi\vec{\nabla}\vec{a} = grad\varphi \cdot \vec{a} + \varphi \cdot div\vec{a} = \frac{\partial(\varphi a_k)}{\partial k}$$

$$rot\vec{a} = \vec{\imath}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \vec{\jmath}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) = \vec{\nabla} \times \vec{a} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

1.3 Integrální věty

Stokesova věta převádí křivkový integrál ze skalárního součinu $\vec{a}\overrightarrow{dl}$, kde $\overrightarrow{dl}$ je diferenciální úsek křivky, na plošný integrál, v kterém se $rot\vec{a}$ skalárně násobí diferenciálem plochy $d\vec{S}$ a tyto součiny se integrují po ploše uzavřenou křivkou. [2]

$$\oint \vec{a}\overrightarrow{dl} = \int_S rot\vec{a}d\vec{S}$$

Greenova věta převádí plošný integrál z $\varphi d\vec{S}$, kde $d\vec{S}$ je elementární plocha povrchu uzavřeného objemu *V*, na objemový integrál z *grad*φdV. Přičemž *dV* je element objemu. [2]

$$\int_S \varphi d\vec{S} = \int_V grad\varphi dV$$

Gaussova – Ostrogradského věta převádí rovněž plošný integrál na objemový, kde integrand na jedné straně je skalární součin $\vec{a}d\vec{S}$ a na druhé straně $div\vec{a}\ dV$. [2]

$$\int_S \vec{a}d\vec{S} = \int_V div\vec{a}\, dV$$

1.4 Základní vlastnosti tekutin

Stavové parametry v neproudící tekutině jsou hustota ρ, tlak p a teplota T. V proudící tekutině k těmto třem parametrům patří navíc rychlost w. K určení stavových parametrů musíme mít k dispozici samozřejmě stejný počet rovnic. V prvním případě 3 a v druhém 4 rovnice, které se řeší jako soustava. [2]

Stavová rovnice udává vazbu mezi p, ρ, T a má následující tvary:

- Ideální plyn: $\frac{p}{\rho} = r \cdot T$, kde r je plynová konstanta, např. $r_{vzduch} = 287{,}04\ J.kg^{-1}.K^{-1}$,
- Reálný plyn: $\frac{p}{\rho} = r \cdot T \cdot [1 + \rho \cdot a_1(T) + \rho^2 \cdot a_2(T) + \cdots]$, kde a_1 a a_2 sú konstanty závislé na teplotě a upravují rovnici ideálního plynu v souladu se skutečností,
- Ideální kapalina: $\rho = konst.$,
- Reálná kapalina: $\frac{\varepsilon \cdot \beta \cdot p}{\alpha} = 1.$

  kde: ε – izotermický součinitel objemové **stlačitelnosti**,

  β – izochorický součinitel tlakové **rozpínavosti**,

  α – izobarický součinitel objemové **roztažnosti**,

  p – referenční tlak (přibližně 101 325 Pa).

1.4.1 Izotermický součinitel objemové stlačitelnosti

Stlačitelnost tekutin je schopnost tekutin měnit svůj objem při změně tlaku, přičemž se teplota nemění. Proces diferenciálního stlačování reálné tekutiny při konstantní teplotě popíšeme na základě úplného diferenciálu stavové veličiny měrného objemu, jako funkci tlaku a teploty.

$$v = f(p,t) \quad \rightarrow \quad dv = \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_t dp + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_p dt$$

$$\frac{dv}{dp} = \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_t = \frac{v - v_0}{\Delta p} = -\varepsilon \cdot v_0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\varepsilon} = -\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_t \cdot \frac{1}{v_0}$$

ε je izotermický součinitel objemové stlačitelnosti. Reciproká hodnota tohoto součinitele je modul objemové pružnosti k.

1.4.2 Izochorický součinitel tlakové rozpínavosti

Když přivedeme teplo dQ do reálné tekutiny s objemem V, která je v pevné nádobě, zvýší se jednak teplota média o dT a rovněž tlak o dp. Jelikož se v tomto případě jedná o tlakovou rozpínavost, budeme vycházet z úplného diferenciálu tlaku, který je funkcí teploty a objemu.

$$p = f(v,t) \quad \rightarrow \quad dp = \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_t dv + \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_v dt$$

$$\frac{dp}{dt} = \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_v = \frac{p - p_0}{t - t_0} = \beta \cdot p_0 \quad (t_0 = 0°C) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{p - p_0}{t} \cdot \frac{1}{p_0}$$

β je izochorický součinitel tlakové rozpínavosti.

1.4.3 Izobarický součinitel objemové roztažnosti

Vytknutému objemu reálné kapaliny *V* dodáme teplo *dQ*, které způsobí nárůst teploty o *dT* a objemu o *dV* při konstantním tlaku.

$$v = f(p,t) \quad \rightarrow \quad dv = \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_t dp + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_p dt$$

$$\frac{dv}{dt} = \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_p = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \alpha \cdot v_0 \quad (t_0 = 0°C) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\alpha} = \frac{v - v_0}{t} \cdot \frac{1}{v_0}$$

α je izobarický součinitel objemové roztažnosti.

1.4.4 Viskozita tekutin, smykové napětí

Tato vlastnost se projevuje za pohybu skutečných kapalin. Pokud se pohybují sousední vrstvy kapaliny různými rychlostmi, vzniká na jejich rozhraní smykové napětí, které bráni pohybu. Pomalejší vrstva je urychlována a naopak zase rychlejší zpomalována. Smykové napětí je vyvolané vnitřním třením, resp. **viskozitou** tekutin, která je úměrná změně rychlosti ve směru kolmém na směr pohybu podle Newtonova vztahu:

$$\tau = \eta \cdot \frac{dw}{dy} \ [Pa]$$

Řecký symbol η je **dynamická viskozita** a *dw/dy* je gradient rychlosti ve směru kolmém na směr pohybu. Uvedenou formulaci uvedl v r. 1687 anglický fyzik Isaac Newton pro laminární proudění. Uvedený vztah platí pouze pro tzv. Newtonské tekutiny. Existují taky tekutiny Nenewtonské, kterým se v rámci problematiky MT I. nebudeme věnovat. [5]

1.5 Základní rovnice využívané v MT I.

Tato kapitola slouží jako přehled nejdůležitějších rovnic, které se později budou objevovat v řešených úlohách. Cílem tedy nebude detailně objasnit matematickou, resp. fyzikální podstatu jednotlivých vztahů. Matematická odvození naleznete např. v [1], [2].

1.5.1 Navier – Stokesova pohybová rovnice

Jedná se o jednu z nejdůležitějších parciálních diferenciálních rovnic proudění. Rovnici odvodil francouzský matematik *Claude Louis Marie Henri Navier* (1827) a také nezávisle na něm jiným způsobem anglický matematik a fyzik *George Gabriel Stokes* (1845).

N-S rovnice ve své podstatě vyjadřuje rovnováhu sil působících na element proudící viskózní tekutiny (uvažujeme tedy i vliv třecích sil). Její odvození vychází z II. Newtonovho pohybového zákona. [2]

$$m\frac{d\vec{w}}{dt} = \sum_{i}^{N} \vec{F}_i$$

Kompletní odvození N-S rovnice, které je poměrně rozsáhlé, je možné v případě zájmu dohledat v [6]. Ukážeme si pouze výsledný tvar rovnice a popíšeme jednotlivé členy.

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} + w_k\frac{\partial w_i}{\partial k} = R_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial i} + \nu\frac{\partial^2 w_i}{\partial k^2} + \frac{1}{3}\nu\frac{\partial}{\partial i}\left(\frac{\partial w_k}{\partial k}\right)$$

1. Člen $\frac{\partial w_i}{\partial t}$ je místní (lokální) zrychlení, které zaznamenáme při sledování určitého bodu proudového pole v průběhu času.
2. Člen $w_k\frac{\partial w_i}{\partial k}$ je vnitřní setrvačné zrychlení, které zaznamenáme, když se posuneme do sousedního bodu prostoru, kde je jiná rychlost.
3. Člen R_i je vnější setrvačné zrychlení, dané vnějšími účinky na proudové pole (gravitační zrychlení, odstředivé zrychlení, dané rotací kanálu, v kterém probíhá proudění apod.).
4. Člen $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial i}$ je zrychlení od tlakových sil od rozložení tlaku v proudovém poli.
5. Člen $\nu\frac{\partial^2 w_i}{\partial k^2}$ je zrychlení od třecích sil bez ohledu na stlačitelnost proudění.
6. Člen $\frac{1}{3}\nu\frac{\partial}{\partial i}\left(\frac{\partial w_k}{\partial k}\right)$ je zrychlení od třecích sil s ohledem na stlačitelnost proudění. [2]

Z matematického hlediska je N-S rovnice parciální diferenciální rovnicí druhého řádu, obecně eliptického typu a obecně nelineární. Nelinearitu způsobuje 2. člen, který má za následek náročné řešení a hysterezi výsledků, především rychlosti *w*. Analytické řešení je možné pouze u zjednodušených případů, např. když máme možnost některé členy (nelineární) vynechat, a pokud je geometrie řešeného útvaru prostá. Numerické řešení je reálné a běžně se realizuje pomocí komerčních programů. [2]

Je důležité poznamenat, že tato rovnice platí jak pro laminární, tak pro turbulentní proudění. Numerické řešení u turbulentních úloh, kdy se všechny parametry *(w, p, ρ)* stochasticky mění, si vyžaduje určitou úpravu N-S rovnice (ustředění v čase).

1.5.2 Eulerova rovnice

Eulerova rovnice vnikne prostým zjednodušením N-S rovnice, a to konkrétně zanedbáním vlivu kinematické viskozity ($\nu = 0$). Je to tedy pohybová rovnice proudění nevazké tekutiny.

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} + w_k \frac{\partial w_i}{\partial k} = R_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial i}$$

Ve statice tekutin se používá obdoba obecné Eulerovy rovnice, tzv. **Eulerova rovnice hydrostatiky**, která vznikne odstraněním rozvedené substanciální derivace na levé straně. Dostaneme tedy:

$$-\frac{\partial p}{\partial i} + \rho R_i = 0$$

Pro praktické použití se převádí uvedená rovnice na tzv. **tlakovou rovnici**, ke které se dostaneme následujícími úpravami.

$$-\left(\vec{i}\frac{\partial p}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial p}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial p}{\partial z}\right) = -\rho\left(\vec{i}R_x + \vec{j}R_y + \vec{k}R_z\right)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho R_x \quad |\cdot dx \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho R_y \quad |\cdot dy \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho R_z \quad |\cdot dz$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz = \rho\left(R_x dx + R_y dy + R_z dz\right) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial k}dk = \rho R_k dk$$

$$dp = \rho\left(R_x dx + R_y dy + R_z dz\right) \quad \rightarrow \quad dp = \rho R_k dk$$

Tlakovou rovnici používáme k výpočtu tlaku v libovolném místě tekutiny, která je v relativním klidu. V takové tekutině existují plochy s různým konstantním tlakem, tzv. **tlakové hladiny**. Protože v každém bodu prostoru vyplněného tekutinou je jediný tlak, přechází ním jediná tlaková hladina. Hladinové plochy mají v úlohách hydrostatiky velký význam, především vytvářejí rozhraní mezi okolitým vzduchem a kapalinou. Rovnici tlakové hladiny dostaneme, když položíme *p = konst.* tedy *dp = 0*. [2]

$$R_x dx + R_y dy + R_z dz = 0 \quad \rightarrow \quad R_k dk = 0$$

1.5.3 Bernoulliho rovnice

Bernoulliho rovnice je zvláštním případem N-S rovnice, resp. její nevazké formy (tedy Eulerovy rovnice).

$$\frac{dw_i}{dt} = R_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial i} \qquad /\cdot di$$

$$w_i dw_i = R_i di - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial i} di$$

$$\sum: \quad w_k d_k = R_k dk - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial k} dk$$

$$w^2 = w_k^2 \quad \rightarrow \quad wdw = w_k dk \quad , \quad dp = \frac{\partial p}{\partial t} dt + \frac{\partial p}{\partial k} dk \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial k} = dp - \frac{\partial p}{\partial t} dt$$

$$wdw = R_k dk - \frac{1}{\rho}\left(dp - \frac{\partial p}{\partial t} dt\right)$$

Poslední rovnice vyjadřuje obecnou Bernoulliho rovnici, kterou je ještě možné upravovat na základě následujících zjednodušení.

Když budeme při řešení úloh uvažovat stacionární proudění, tedy $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$, potom Bernoulliho rovnice nabyde tvar:

$$wdw = R_k dk - \frac{dp}{\rho}$$

Pokud bude na tekutinu působit jenom gravitační zrychlení *(R_x = R_z = 0, R_y = -g)* a uvažujeme, že se jedná o nestlačitelné proudění, pak:

$$wdw = -gdy - \frac{dp}{\rho} \quad \Big| \int$$

$$\frac{w^2}{2} + gy + \frac{p}{\rho} = C \quad /\cdot \frac{1}{g} \quad \rightarrow \quad B.R\ ve\ formě\ energií$$

$$\frac{w^2}{2g} + y + \frac{p}{\rho g} = y_c \quad / \cdot \rho g \quad \rightarrow \quad B.R\ ve\ formě\ výšek$$

$$\rho\frac{w^2}{2} + \rho g y + p = p_C \quad \rightarrow \quad B.R.\ ve\ formě\ tlaků$$

1.5.4 Rovnice spojitosti

Rovnice spojitosti (kontinuity) je zákonem zachování hmotnosti. Jinými slovy, hmotnost tekutiny, která protéká kontrolním objemem, musí být konstantní. U kontrolního objemu můžu vzniknout dvě změny hmotnosti, a to **lokální změna** v samotném kontrolním objemu (tekutina se stláčí a rozpíná) a **konvektivní změna** hmotnosti, způsobená rozdílem vstupující a vystupující hmotnosti z kontrolního objemu. Obě změny musí dávat v konečném důsledku nulovou změnu hmotnosti, co je možné pouze v případě, kdy jsou obě změny stejně velké, ale s opačným znamínkem. Tedy jedna znamená zvětšení a druhá zmenšení hmotnosti. [2], [5]

Rovnice kontinuity v obecném tvaru vypadá následovně:

$$\frac{\partial\left(\rho \cdot \vec{S}\right)}{\partial t} + \frac{\partial\left(\rho \vec{S}\vec{w}\right)}{\partial \vec{s}} = 0$$

V případe, že se průřez nebude v čase měnit (uvažujeme pouze změnu polohy) a parametr hustoty budeme taky popisovat jenom z hlediska změny polohy, dostaneme:

$$0 + \frac{\partial\left(\rho \vec{S}\vec{w}\right)}{\partial \vec{s}} = 0 \quad \rightarrow \quad \rho \vec{S}\vec{w} = konst.$$

Pokud budeme považovat všechny parametry obecné rovnice kontinuity jako proměnné a jen průřez bude konstantní, získáme:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \vec{w})}{\partial \vec{s}} = 0$$

Uvedenou rovnici lze zapsat taky pro prostorové proudění a rozepsat do jednotlivých složek.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho\vec{w}) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot w_x)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\rho \cdot w_y\right)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot w_z)}{\partial z} = 0$$

1.5.5 Věta o změně toku hybnosti (VZTH)

VZTH představuje vhodný nástroj sloužící k řešení dynamických účinků proudící tekutiny na těleso. Uplatňuje se převážně u lopatkových strojů a celkově lze tuto metodu zařadit mezi metody typu *black box*. Aerodynamické účinky tekutiny se totiž řeší jenom na základě znalosti stavu proudění na tzv. kontrolní ploše obklopující zkoumané proudové pole, kterého vlastnosti přitom nepotřebujeme znát. [2]

Odvození VZTH vychází z I. impulsové věty, kterou lze slovně interpretovat následující definicí. **Časová změna celkové hybnosti soustavy hmotných bodů je rovná vnější síle. Vnitřní síly nemají vliv na celkovou hybnost soustavy.**

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{F}$$

$$d\vec{H} = \vec{F} \cdot dt$$

$$\int_1^2 m \cdot d\vec{w} = \int_0^t \vec{F} \cdot dt \quad \rightarrow \quad \vec{F} = \dot{m} \cdot (\vec{w}_2 - \vec{w}_1)$$

Postup řešení touto metodou je možné shrnout do tří bodů.

1) Volba souřadnicového systému
2) Volba vhodné kontrolní plochy
3) Zápis VZTH ve směru souřadnicových os

- Levá strana rovnice obsahuje síly, kterými tekutina uzavřená v kontrolní ploše působí na kontrolní plochu a na obtékané těleso (znamínka se určují podle směru os).
- Pravá strana rovnice sestává ze sumy toků hybnosti, přičemž se vstupní toky značí kladně, výstupní záporně a směry toků opět korespondují se směry příslušných os. [2]

2. Základní vlastnosti

Příklad 2.1

Ve zcela naplněné tlakové nádrži je voda o tlaku p_0. Po vypuštění vody o objemu ΔV klesl tlak na tlak atmosférický p_{atm}. Určete objem vody v nádrži při zanedbání pružnosti nádoby.

Zadané hodnoty: p_{atm} = 0,1 MPa, p_0 = 1 MPa, ΔV = 36 dm^3, ε = $5 \cdot 10^{-10}$ $m^2 \cdot N^{-1}$

Vypočtěte: V_0

Řešení:

$$\varepsilon = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \quad \rightarrow \quad \Delta V = -\varepsilon \cdot V_0 \cdot \Delta p$$

$$V_0 = -\frac{\Delta V}{\varepsilon \cdot (p_{atm} - p_0)} = -\frac{36 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-10} \cdot (1-10) \cdot 10^5} = 80\ m^3$$

Příklad 2.2

Určete, kolik tekutiny vyteče netěsnostmi z uzavřeného absolutně tuhého potrubí, když dojde k poklesu tlaku z p_0 na p_1.

Zadané hodnoty: p_0 = 7,5 MPa, p_1 = 7 MPa, d = 400 mm, L = 2 km, ε = $5 \cdot 10^{-10}$ $m^2 \cdot N^{-1}$

Vypočtěte: ΔV

Řešení:

$$\varepsilon = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \quad \rightarrow \quad \Delta V = -\varepsilon \cdot V_0 \cdot \Delta p$$

$$V_0 - V_1 = -\varepsilon \cdot V_0 \cdot (p_0 - p_1)$$

$$V_1 - V_0 = \varepsilon \cdot V_0 \cdot (p_0 - p_1) = \varepsilon \cdot \pi \frac{d^2}{4} \cdot L \cdot (p_0 - p_1)$$

$$V_1 - V_0 = 5 \cdot 10^{-10} \cdot \pi \frac{0{,}4^2}{4} \cdot 2 \cdot (7{,}5 - 7) \cdot 10^6 = 62{,}8\ l$$

Objem tekutiny se zvětšil o 62,8 l, toto množství tedy uniklo netěsnostmi.